Leçon n° 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

I/ Matrices symétriques et hermitiennes

A/ Définition et propriétés générales. [G] [ROM]

Définition 1 : Matrice symétrique et matrice hermitienne.

Exemple 2 : Exemple de telles matrices.

Proposition 3 : L'ensemble $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et $H_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n^2.

Proposition 4 : On a $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$.

Définition 5 : Matrices symétriques (hermitiennes) positives et matrices définies positives.

Proposition 6 : Leurs spectres sont réels.

B/ Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes. [G]

Définition 7 : Forme bilinéaire symétrique et forme quadratique.

Définition 8 : Forme sésquilinéaire à géométrie hermitienne et forme hermitienne.

Proposition 9 : Unicité de la forme polaire et formules de polarisation.

Remarque 10 : Lien avec les matrices.

Exemple 11 : Écrire la matrice de deux formes quadratiques / hermitiennes.

Définition 12 : Forme quadratique q définie (positive).

Proposition 13 : Lien entre une matrice définie positive et une forme quadratique définie positive.

II/ Réduction et applications

A/ Orthogonalité et théorème spectral. [G] [ROM] [FGNAlg3]

Définition 14 : Base q-orthogonale.

Théorème 15 : Existence d'une telle base.

Corollaire 16 : Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Théorème 17 : Théorème spectral.

Application 18 : Existence de la racine carrée.

Application 19 : Lien entre les valeurs propres et le caractère positif.

Développement 1

Proposition 20 : Diagonalisation simultanée.

Lemme 21 : log-concavité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 22 : Ellipsoïde de John-Loewner.

B/ Signature d'une forme quadratique et hermitienne. [G] [ROM]

Théorème 23 : Réduction de Gauss.

Exemple 24 : Exemple de réduction.

Théorème 25 : Sylvester et signature.

Exemple 26 : Avec l'exemple précédent, signature.

Corollaire 27 : Congruence et nombre de classes d'équivalence pour l'action.

III/ Propriétés topologiques des matrices symétriques réelles. [ROM]

Proposition 28 : Critère de Sylvester.

Remarque 29 : Critère simple pour vérifier qu'une matrice symétrique est définie positive informatiquement.

Corollaire 30 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 31 : Décomposition polaire.

Application 32 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Application 33 : $O_n(\mathbb{R})$ est le seul sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$.

Application 34 : Calcul de $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Définition 35 : Exponentielle de matrice.

Exemple 36 : Exponentielle d'une matrice diagonale.

Développement 2

Théorème 37 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

IV/ Applications à d'autres domaines

A/ Différentielle seconde. [PGCD]

Théorème 38 : Schwarz.

Définition 39 : Hessienne qui est donc symétrique.

Théorème 40 : Conditions nécessaires et suffisantes pour un extremum.

Application 41 : Cas particulier pour $n = 2$.

B/ En analyse numérique. [CIA]

Proposition 42 : Décomposition LU.

Remarque 43 : Complexité pour n systèmes linéaires similaires : $O(n^3)$ opérations.

Proposition 44 : Décomposition de Cholesky.

Remarque 45 : Toujours une complexité de $O(n^3)$ opérations mais deux fois moins d'opérations pour les matrices symétriques.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre p. 227-240
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 732-743
— [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 283 et p. 360
— [CIA] Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle p. 82-90
— [FGNAlg3] Fracinou, Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 229